第 2 节 比较指、对数的大小：构造函数（★★★★）

强化训练

1．（2022·浙江月考·★★★）已知 $a=2^{\frac{4}{5}}$，$b=4^{\frac{2}{7}}$，$c=25^{\frac{1}{5}}$，则（　　）

（A）$b<a<c$　　（B）$a<b<c$　　（C）$b<c<a$　　（D）$c<a<b$

答案：A

解析：观察三个数的结构可发现 a，b 底数有猫腻，考虑化同底；a，c 指数有猫腻，考虑化同指，故先把它们化同底、同指，再构造指数函数和幂函数来比较，

$b=4^{\frac{2}{7}}=(2^2)^{\frac{2}{7}}=2^{\frac{4}{7}}$，函数 $f(x)=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，所以 $f(\frac{4}{7})<f(\frac{4}{5})$，从而 $2^{\frac{4}{7}}<2^{\frac{4}{5}}$，故 $b<a$；

$a=2^{\frac{4}{5}}=(2^2)^{\frac{2}{5}}=4^{\frac{2}{5}}$，$c=25^{\frac{1}{5}}=(5^2)^{\frac{1}{5}}=5^{\frac{2}{5}}$，函数 $g(x)=x^{\frac{2}{5}}$

在 $(0,+\infty)$ 上↗，所以 $a<c$，故 $4^{\frac{2}{5}}<5^{\frac{2}{5}}$；所以 $b<a<c$.

2．（2022·江苏南通模拟·★★★）已知 $a=\mathrm{e}-1$，$b=\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}-\frac{3}{4}$，$c=4-\frac{1}{2\ln 2}$，则（　　）

（A）$b>c>a$　　（B）$a>c>b$　（C）$c>b>a$　（D）$c>a>b$

答案：C

答案：a，b，c 中 b 的结构特征最清晰，且观察发现 a 可以看成 $\mathrm{e}^1-\frac{1}{1}$，与 b 的结构是统一的，故考虑将 c 也化为与它们相同的结构，从而构造函数分析，

由题意，$c=4-\frac{1}{2\ln 2}=\mathrm{e}^{\ln 4}-\frac{1}{\ln 4}$，设 $f(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}(x\ge 1)$，则 $a=f(1)$，$b=f(\frac{4}{3})$，$c=f(\ln 4)$，

因为 $f'(x)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{x^2}>0$，所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上↗，

接下来比较 a，b，c 自变量的大小，显然 $\frac{4}{3}$ 和 ln4 都大于 1，故只需比较 $\frac{4}{3}$ 和 ln4，可将 $\frac{4}{3}$ 化对数来看，

因为 $\frac{4}{3}=\ln\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}$，且 $(\mathrm{e}^{\frac{4}{3}})^3=\mathrm{e}^4<64=4^3$，所以 $\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}<4$，从而 $\frac{4}{3}<\ln 4$，故 $f(\ln 4)>f(\frac{4}{3})>f(1)$，即 $c>b>a$.

3．（2023·全国模拟·★★★）已知 $a=9\ln 10$，$b=8\ln 11$，$c=7\ln 12$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

（A）$c<a<b$　　（B）$b<a<c$　　（C）$a<b<c$　　（D）$c<b<a$

答案：D

解析：a，b，c 的共同特征是 $9+10=8+11=7+12=19$，可据此将三个数据的结构调整为一致，

$a=(19-10)\ln 10$，$b=(19-11)\ln 11$，$c=(19-12)\ln 12$，

设 $f(x)=(19-x)\ln x(10\le x\le 12)$，则 $a=f(10)$，$b=f(11)$，$c=f(12)$，

因为 $f'(x)=-\ln x+\dfrac{19-x}{x}=\dfrac{19}{x}-\ln x-1$，当 $10\le x\le 12$ 时，$\dfrac{19}{x}<2$，$\ln x>2$，所以 $f'(x)<0$，

从而 $f(x)$ 在 $[10,12]$ 上↘，故 $f(12)<f(11)<f(10)$，所以 $c<b<a$.

【反思】观察出各数据结构上的共同特征，是构造函数的重要思路.

4.（2022·重庆月考·★★★）已知 $a=\dfrac{11}{10}$，$b=\ln 2$，$c=e^{\frac{1}{10}}$，则（　　）

（A）$c>a>b$　　（B）$a>c>b$　　（C）$c>b>a$　　（D）$a>b>c$

答案： A

解析： 先简单估算一下，$a>1$，$0<b<1$，$c>1$，所以 b 最小，

那 a，c 怎么比呢？它们都比较接近 1，找中间量不方便，且结构不同，只能从数字来看，注意到 $\dfrac{11}{10}=1+\dfrac{1}{10}$，

我们把 $\dfrac{1}{10}$ 看成 x，则 $a=1+x$，$c=e^x$，可用切线放缩不等式 $e^x\ge 1+x$ 来完成比较，

由切线放缩不等式，$e^x\ge 1+x$，当且仅当 $x=0$ 时取等号，所以 $e^{\frac{1}{10}}>1+\dfrac{1}{10}=\dfrac{11}{10}$，从而 $c>a$，故 $c>a>b$.

5.（2022·全国甲卷·★★★★）已知 $a=\dfrac{31}{32}$，$b=\cos\dfrac{1}{4}$，$c=4\sin\dfrac{1}{4}$，则（　　）

（A）$c>b>a$　　（B）$b>a>c$　　（C）$a>b>c$　　（D）$a>c>b$

答案： A

解析： a，b，c 结构不同，所以从数字上考虑，$\dfrac{1}{4}$ 重复出现了，故将 $\dfrac{31}{32}$ 也化为 $\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{31}{32}=1-\dfrac{1}{32}=1-\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{1}{4})^2$，

所以把 $\dfrac{1}{4}$ 看成 x，构造函数，下面先比较 a 和 b，

$a-b=1-\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{1}{4})^2-\cos\dfrac{1}{4}$，设 $f(x)=1-\dfrac{1}{2}x^2-\cos x(0\le x\le\dfrac{\pi}{2})$，则 $f'(x)=\sin x-x$，$f''(x)=\cos x-1\le 0$，

所以 $f'(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上↘，又 $f'(0)=0$，所以 $f'(x)\le 0$，从而 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上↘，故 $f(\dfrac{1}{4})<f(0)$，

即 $1-\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{1}{4})^2-\cos\dfrac{1}{4}<0$，所以 $a-b<0$，从而 $b>a$；

从结构来看，b 和 c 比较接近，所以接下来比较 b 和 c，令 $x=\dfrac{1}{4}$，则 $b=\cos x$，$c=\dfrac{\sin x}{x}$，所以 $\dfrac{c}{b}=\dfrac{\tan x}{x}$，

故只需比较 $\tan x$ 与 x 的大小，可将其作差构造函数来分析，

设 $g(x)=\tan x-x(0\le x\le\dfrac{1}{4})$，则 $g'(x)=(\tan x)'-1=(\dfrac{\sin x}{\cos x})'-1=\dfrac{\cos^2 x-(-\sin x)\sin x}{\cos^2 x}-1=\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\ge 0$，

所以 $g(x)$ 在 $[0,\dfrac{1}{4}]$ 上↗，从而 $g(\dfrac{1}{4})>g(0)$，即 $\tan\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}>0$，故 $\tan\dfrac{1}{4}>\dfrac{1}{4}$，

所以 $\dfrac{c}{b}=\dfrac{\tan\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}>1$，从而 $c>b$，故 $c>b>a$.

【反思】当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时，$\sin x<x<\tan x$；对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$1-\dfrac{x^2}{2}\le\cos x$；若熟悉这两个不等式，本题的构

造思路会更清晰.

6.（2021 • 全国乙卷 • ★★★★）设 $a=2\ln 1.01$，$b=\ln 1.02$，$c=\sqrt{1.04}-1$，则（　　）

（A）$a<b<c$　　（B）$b<c<a$　　（C）$b<a<c$　　（D）$c<a<b$

答案：B

解析：观察发现 a、b 是同底数的对数，容易比较大小，所以先比较 a 和 b，

$a=2\ln 1.01=\ln 1.01^2=\ln 1.0201>\ln 1.02=b$，所以选项 A、D 错误，此时结合选项知只需比较 a 和 c，

而 a 和 c 的结构不同，所以从数字上找共同点，注意到 $1.01=1+0.01$，$1.04=1+4\times 0.01$，我们把 0.01 看成 x，构造函数的方法就出来了，

$a-c=2\ln 1.01-\sqrt{1.04}+1=2\ln(1+0.01)-\sqrt{1+4\times 0.01}+1$，设 $f(x)=2\ln(1+x)-\sqrt{1+4x}+1$，$x\in[0,0.01]$，

则 $f'(x)=\dfrac{2}{1+x}-\dfrac{4}{2\sqrt{1+4x}}=\dfrac{2[\sqrt{1+4x}-(1+x)]}{(1+x)\sqrt{1+4x}}$，当 $x\in[0,0.01]$ 时，$(1+x)^2-(\sqrt{1+4x})^2=x(x-2)\le 0$，

所以 $(1+x)^2\le(\sqrt{1+4x})^2$，从而 $1+x\le\sqrt{1+4x}$，故 $f'(x)\ge 0$，当且仅当 $x=0$ 时取等号，

所以 $f(x)$ 在 $[0,0.01]$ 上↗，从而 $f(0.01)>f(0)=0$，故 $a-c>0$，所以 $a>c$，故选 B.